## 基础课44 圆的方程

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 圆的方程 | 掌握 | 2023年全国乙卷（文）  2023年上海卷  2023年天津卷  2022年全国甲卷（文）  2022年全国乙卷（理） | ★★☆ | 直观想象  数学运算 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，主要以客观题的形式出现，属于中低档题，命题热点是利用几何法或待定系数法求圆的方程.预计2025年高考命题情况变化不大，但应适当加强圆的参数方程的应用 | | | |

### 基础知识·诊断

#### 夯实基础

##### 一、圆的定义和圆的方程

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 定义 | | 平面内到定点的距离等于①定长的点的集合叫作圆 | |
| 方程 | 标准 |  | 圆心② |
| 半径为 |
| 一般 |  | 圆心③, |
| 半径为④ |

【提醒】当时，此方程表示点,;当时，它不表示任何图形.

##### 二、点与圆的位置关系

1.设点，圆的标准方程为.

|  |  |
| --- | --- |
| 理论依据 | 点到圆心的距离与半径之间的关系 |
| 三种情况 | ⑤ 点在圆外 |
| ⑥点在圆上 |
| ⑦ 点在圆内 |

2.设点，圆的一般方程为.

|  |  |
| --- | --- |
| 理论依据 | 由圆的标准方程转化而来 |
| 三种情况 | 点在圆外 |
| 点在圆上 |
| 点在圆内 |

###### 知识 拓展

1.几种特殊位置的圆的方程

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 标准方程的设法 | 一般方程的设法 |
| 圆心在原点 |  |  |
| 过原点 |  |  |
| 圆心在轴上 |  |  |
| 圆心在轴上 |  |  |
| 与轴相切 |  |  |
| 与轴相切 |  |  |

2.以,为直径的两端点的圆的方程是.

3.二元二次方程表示圆的充要条件是

#### 诊断自测

##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） 确定圆的几何要素是圆心与半径.( √ )

（2） 若点在圆外,则.( √ )

（3） 方程不一定表示圆.( × )

（4） 方程表示圆心为,半径为的一个圆.( × )

2. （易错题）已知等腰的一个顶点，底边的一个端点，则底边的另一个端点的轨迹方程为（除去，两点）.

【易错点】在求轨迹方程时一定要考虑是否有杂点存在，如有杂点存在，一定要剔除杂点.

[解析]由题意可设另一个端点，腰长，则，所以，整理得，又因为，，三点能构成三角形，所以三点不共线，需要除去，两点，所以的轨迹方程为（除去，两点）.

##### 题组2 走进教材

3. （人教A版选修①P89·T8改编）已知长为的线段的两个端点和分别在轴和轴上运动，则线段的中点的轨迹方程是.

[解析]设线段的中点为，当，不与原点重合时，是直角三角形，且为直角，则，即的中点的轨迹是以原点为圆心，为半径的圆（除去与坐标轴的交点），轨迹方程为；当，中有一个是原点，同样满足.故线段的中点的轨迹方程为.

4. （人教A版选修①P88·T4改编）圆心在曲线上，且与直线相切的面积最小的圆的方程为.

[解析]不妨设圆心,，其中，半径为，因为直线与圆相切，所以，若圆的面积最小，则半径最小，则，当且仅当时取等号，即，此时，所以圆的方程为.

##### 题组3 走向高考

5. [2023·全国乙卷]已知实数,满足，则的最大值是( C ).

A. B. 4 C. D. 7

[解析]，整理得，令，则，因为，所以,，则当 ，即时，取得最大值，最大值为.故选.

### 考点聚焦·突破

#### 考点一 求圆的方程［自主练透］

1. [2024·海南模拟]“”是“方程表示圆”的( A ).

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

[解析]方程，即表示圆，等价于，解得或,故“”是“方程表示圆”的充分不必要条件.故选.

2. [2024·河南联考]过坐标原点，且与轴和轴的交点分别为,的圆的方程为( A ).

A. B.

C. D.

[解析]设圆的方程为，

由题意知,圆过点，和，

所以解得

所以所求圆的方程为.故选.

3. [2022·全国甲卷]设点在直线上，点和均在上，则的方程为.

[解析]因为点在直线上，所以设点.由点和均在上，可得点，到圆心的距离相等且为的半径，所以，解得,所以,，所以的方程为.

4. [2022·全国乙卷]过四点,,,中的三点的一个圆的方程为或或或（写出一个即可）.

[解析]依题意设圆的方程为，

若过，，，

则解得

所以圆的一般方程为，即；

若过点，，，则

解得所以圆的一般方程为，即；

若过点，，，则

解得所以圆的一般方程为，即；

若过点，，，则

解得所以圆的一般方程为，即.

故圆的方程为或或或.



**求圆的方程的两种方法**

|  |  |
| --- | --- |
| 几何法 | 根据圆的几何性质,直接求出圆心坐标和半径,进而写出方程 |
| 待定系数法 | 1.根据题意,选择标准方程或一般方程;  2.根据条件列出关于,,或,,的方程组;  3.解出,,或,,,代入标准方程或一般方程 |

#### 考点二 与圆有关的轨迹问题［师生共研］

典例1 已知的斜边为,且,，则直角顶点的轨迹方程是.

[解析]设,因为,,三点不共线,所以.

因为,且直线,的斜率均存在,

所以,

又,,所以,

化简得.

因此直角顶点的轨迹方程为.

变式设问 若已知条件不变,则直角边的中点的轨迹方程是.

[解析]设,,因为,是线段的中点,由中点坐标公式得,,所以,.由典例1知,点的轨迹方程为,将,代入得,即.因此动点的轨迹方程为.



**与圆有关的轨迹问题的求法**

|  |  |
| --- | --- |
| 直接法 | 直接根据题设给定的条件列出方程求解 |
| 定义法 | 根据圆的定义列方程求解 |
| 几何法 | 利用圆的几何性质，得出方程 |
| 代入法（相关点法） | 找出要求的点与已知点的关系，代入已知点满足的关系式求解 |

##### 针对训练

已知是圆上的一点，是圆内的一点，，为圆上的动点.

（1） 求线段的中点的轨迹方程；

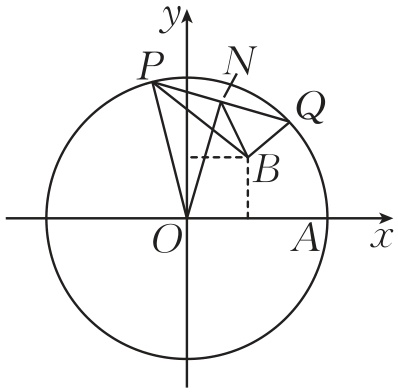
[解析]设的中点为，由中点坐标公式可知，点的坐标为，

因为点在圆上，所以.

故线段的中点的轨迹方程为.

（2） 若 ，求线段的中点的轨迹方程.

[解析]如图，设的中点为，在中，.



设为坐标原点，则，

所以，所以.故线段的中点的轨迹方程为.

#### 考点三 与圆有关的最值问题［多维探究］

##### 圆上的点到直线距离的最值角度1

典例2 （双空题）圆上的点到直线的最大距离为,最小距离为0.

[解析]将圆的一般方程化为标准方程，则问题转化为圆心到直线的距离与圆半径的和或差.因为圆心到直线的距离为，圆与直线相交，所以圆上的点到直线的最大距离为，最小距离为0.



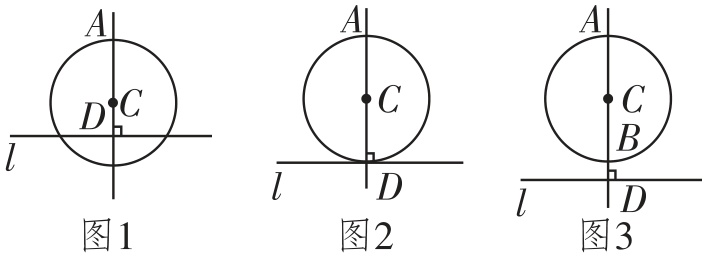
**圆上的点到直线距离的最值的三种类型及解题策略**

设为圆的半径，为圆心到直线的距离.

如图1，当直线与圆相交时，圆上的点到直线的最小距离为0,最大距离;

如图2，当直线与圆相切时，圆上的点到直线的最小距离为0,最大距离;

如图3,当直线与圆相离时，圆上的点到直线的最小距离,最大距离.



##### 借助几何性质求最值角度2

典例3 （一题练透）已知点在圆上.

（1）（斜率型）求的最大值和最小值；

（2）（截距型）求的最大值和最小值；

（3）（点到点的距离型）求的最大值和最小值;

（4）（点到直线的距离型）求的最大值和最小值.

[解析]将圆的一般方程化为标准方程.

（1）可视为点与原点连线的斜率，的最大值和最小值就是与该圆有公共点且过原点的直线斜率的最大值和最小值，即直线与圆相切时的斜率.设过原点的直线的方程为，由直线与圆相切得圆心到直线的距离等于半径，即，解得或，所以的最大值为，最小值为.

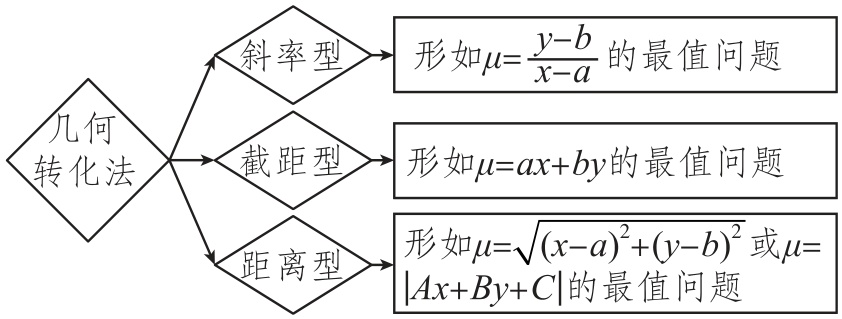
（2）设，则，可视为直线在轴上的截距，所以的最大值和最小值就是直线与圆有公共点时直线纵截距的最大值和最小值，即直线与圆相切时在轴上的截距，由直线与圆相切得圆心到直线的距离等于半径，即，解得或,所以的最大值为，最小值为.

（3），它的最值可视为点到点的距离的最值，可转化为圆心到点的距离与半径的和或差.因为圆心到点的距离为，所以的最大值为，最小值为.

（4），它的最值可视为点到直线的距离的最值的倍，参照典例2可知点到直线的距离的最大值为，最小值为0，故的最大值为，最小值为0.



**与圆有关的最值问题的三种几何转化法**



##### 借助对称性求最值角度3

典例4 已知圆，圆，，分别是圆，上的动点，为轴上的动点，则的最小值为( A ).

A. B. C. D.

[解析]是轴上任意一点，则的最小值为，同理，的最小值为，则的最小值为.作关于轴的对称点（图略），所以，即.故选.



**与圆有关的折线段的最值问题的基本思路**

|  |  |
| --- | --- |
| 动化定 | 把与圆上动点的距离转化为与圆心的距离 |
| 曲化直 | 将折线段之和转化为同一直线上的两线段之和，一般要通过对称性解决 |

##### 建立函数关系求最值角度4

典例5 设点是圆上的动点，定点，，则的最大值为( B ).

A. 6 B. 12 C. 18 D. 24

[解析]由题意，知，，所以.因为是圆上的点，所以，，所以，所以.因为，所以当时，的值最大，最大值为.故选.



**建立函数关系解决与圆有关的最值问题的策略**

列出关于所求目标式子的函数关系式，然后根据关系式的特征选用配方法、判别式法、基本不等式法等方法求最值.

##### 多维训练

1. [2024·广东联考]已知点在直线上，点在圆上，则的最小值为( B ).

A. 1 B. C. D. 5

[解析]由题意可知圆的圆心，半径.

则圆心到直线的距离，故的最小值是.故选.

2. [2024·唐山模拟]（多选题）已知圆，为圆上的动点，则下列结论正确的是( ACD ).

A. 的最大值为 B. 的最大值为3

C. 的最小值为1 D. 的最大值为

[解析]圆的圆心为，半径为，

设，则，因为点在圆上，所以，

解得，故的取值范围是,，故正确；

因为的几何意义为点到原点的距离的平方，且到原点的距离的取值范围为，

所以的取值范围为，故的最大值为9，最小值为1，故错误，正确；

的几何意义为点到直线的距离的倍，又到直线的距离,所以点到直线的距离的取值范围为,故的最大值为，故正确.故选.

3. 已知，点在直线上，点在圆上，则的最小值为.

[解析]因为圆，所以圆心，.设点关于直线的对称点为，则解得故.连接，交圆于（图略），此时取得最小值，由对称性可知.

4. 设是圆上的动点，定点，，则的最大值为10.

[解析]由题意，知，，所以，所以.因为是圆上的点，所以，，所以，所以.因为，所以当时，的值最大，最大值为.